TEORIJA SIGNALA I INFORMACIJA

Studijski program: Primijenjeno računarstvo

VIII termin

Dr Nevena Radović

Z transformacija

- Z transformacija (ZT) je uopštenje FT i DFT, odnosno ona ih sadrži kao svoje posebne slučajeve.
- DFT (a i FT) se koriste za diskretna izračunavanja, odnosno prilikom realizacije sistema.
- ZT se upotrebljava u kvalitativnoj analizi diskretnih sistema (služi za opis sistema i kao sredstvo pri projektovanju, a ne kao sredstvo za direktnu numeričku obradu podataka).
- ZT diskretnog signala $x(n)$:

$$ZT[x(n)] = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

pri čemu je z kompleksan broj.

Z transformacija

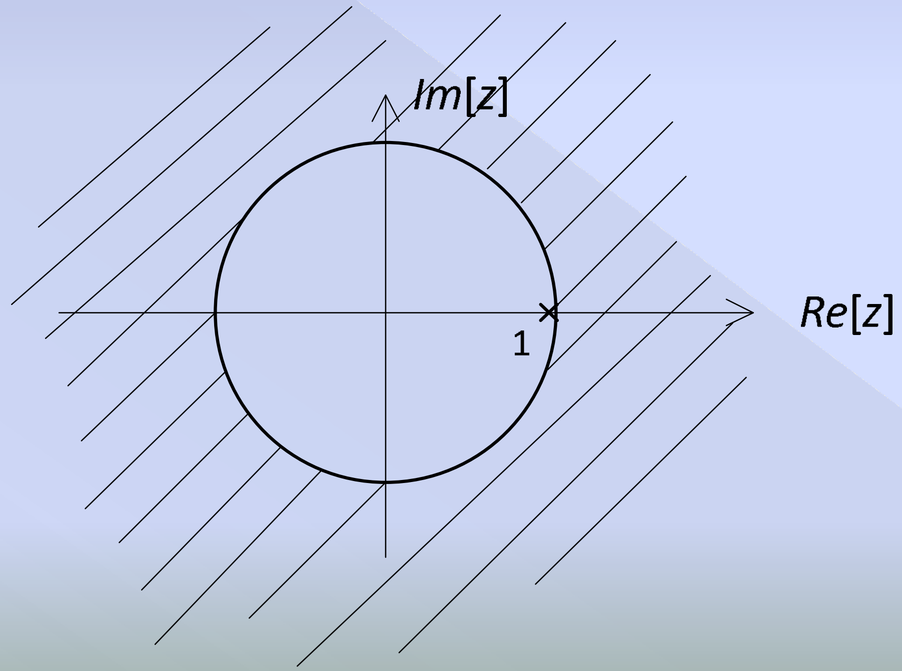
- $X(z)$ postoji za one vrijednosti z za koje red konvergira. Oblast u kojoj red konvergira se naziva ***oblast konvergencije*** i ograničena je kružnicama koje prolaze kroz polove funkcije $X(z)$.
- Napomena: Unutar oblasti konvergencije, funkcija $X(z)$ <u>ne može</u> imati polove!
- **<u>Primjer</u>**: Za signal x(n)=u(n) odrediti njegovu ZT, imajući u vidu da je riječ o kauzalnom nizu.
- **<u>Rješenje</u>**:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}(z^{-1})^{n}=\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1}$$

- Pol dobijamo kada imenilac izjednačimo sa nulom, odnosno: z-1=0, odnosno z=1.

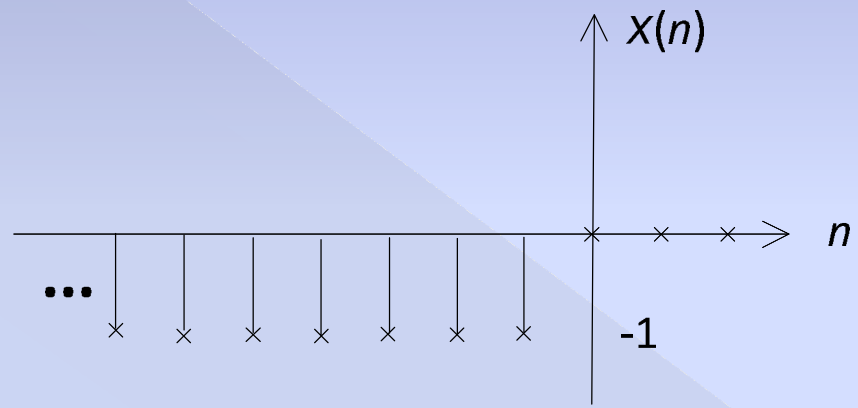
Z transformacija

- Prilikom razvoja u geometrijski red mora biti ispunjen uslov da je: $|z^{-1}|<1$, odnosno $|1/z|<1 \rightarrow$ **$|z|>1$**
- Zahvaljujući ovom uslovu, dobijamo i oblast konvergencije:



Z transformacija

- **Primjer:** Za signal $x(n)=-u(-n-1)$ odrediti njegovu ZT, imajući u vidu da je riječ o antikauzalnom nizu.
- **Rješenje:**

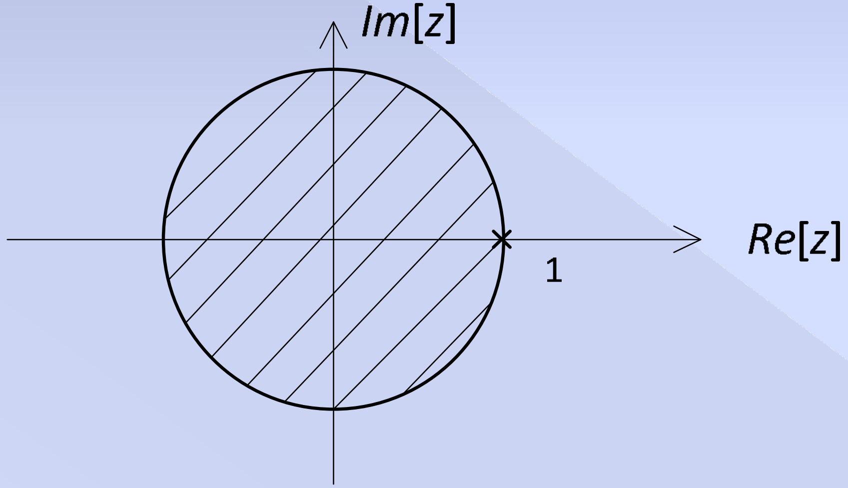


$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}=-\sum_{n=-\infty}^{-1} z^{-n}=-\sum_{n=1}^{\infty} z^{n}=-\sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1}=$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty} z\cdot z^{n}=-z\sum_{n=0}^{\infty} z^{n}=-z\frac{1}{1-z}=\frac{z}{z-1}$$

Z transformacija

- Pol dobijamo za: z-1=0, odnosno z=1, a razvoj u geometrijski red za **|z|<1**, pa je oblast konvergencije:



Z transformacija

- Iz prethodna dva primjera možemo zaključiti da je:

$$ZT[u(n)] = ZT[-u(-n-1)]$$

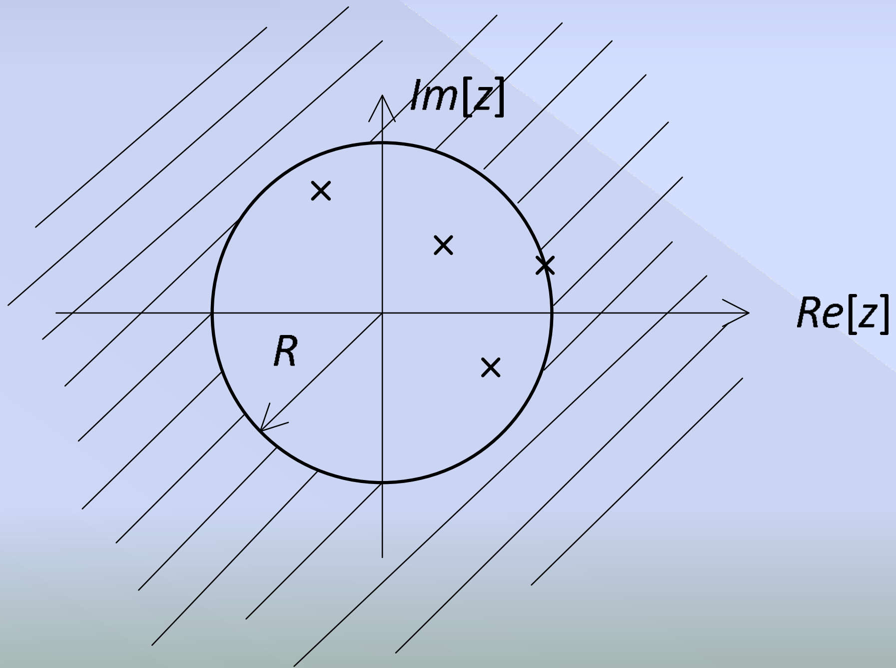
  uz različite oblasti konvergencije:

  1. za $x(n)=u(n)$ oblast konvergencije je $|z|>1$
  2. za $x(n)=-u(-n-1)$ oblast konvergencije je $|z|<1$

- Dakle, X(z) i oblast konvergencije zajedno ***jednoznačno određuju*** niz x(n).
- Na osnovu prethodnih primjera možemo izvesti zaključke o oblastima konvergencije za kauzalne I antikauzalne nizove u opštem slučaju.

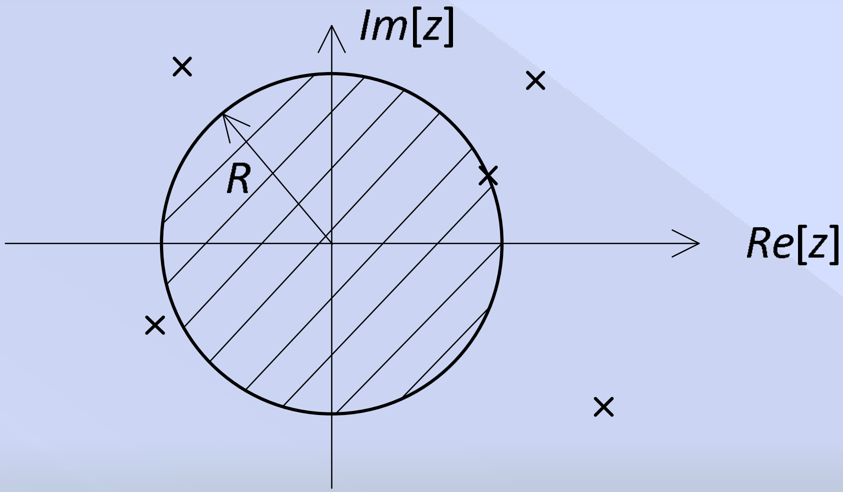
Z transformacija

- **<u>Oblast konvergencije kauzalnog niza</u>** x(n)=0 za n<0 je od beskonačnosti do kružnice koja prolazi kroz pol najudaljeniji od koordinatnog početka, odnosno **R<|z|<∞**:



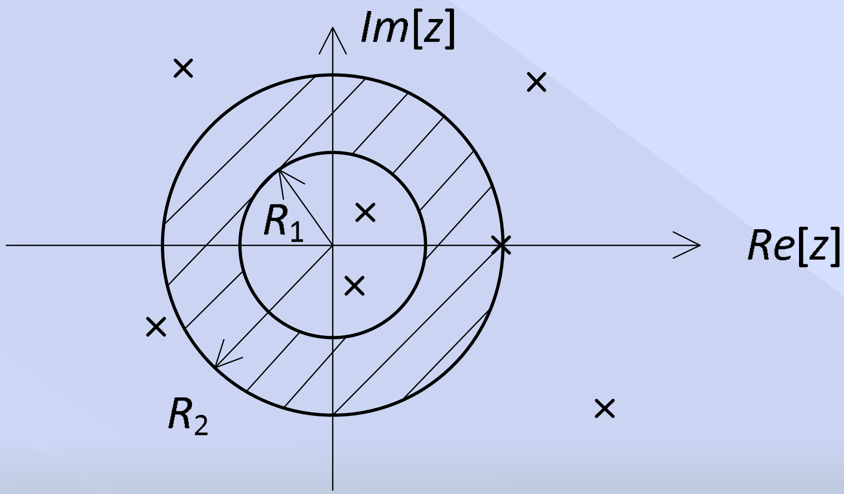
Z transformacija

- **<u>Oblast konvergencije antikauzalnog niza</u>** x(n)=0 za n>0 je od kooridnatnog početka do kružnice koja prolazi kroz pol najbliži koordinatnom početku, odnosno **0<|z|<*R*:**



Z transformacija

- **<u>Oblast konvergencije niza neograničenog sa obije strane:</u>** Ovakav niz se dijeli na kauzalni i antikauzalni dio te je rezultujuća oblast konvergencije jednaka presjeku njihovih oblasti konvergencije, odnosno: $R_1<|z|<R_2$



Z transformacija

- **Primjer**: Za signal $x(n)=a^n u(n)- b^n u(-n-1)$ odrediti njegovu Z transformaciju.
- **Rješenje:**

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}-\sum_{n=-\infty}^{-1} b^n z^{-n}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty} b^{-n}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{b}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{a}{z}}-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{b}\right)^{n+1}=$$

$$=\frac{1}{1-\frac{a}{z}}-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{b}\right)^{n+1}=\frac{z}{z-a}-\frac{z}{b}\frac{1}{1-\frac{z}{b}}=\frac{z}{z-a}-\frac{z}{b}\frac{b}{b-z}=\frac{z}{z-a}+\frac{z}{z-b}$$

Z transformacija

- Pojedinačne sume smo riješili uz pretpostavke da je:
  $|a/z|<1$, odnosno $|z|>|a|$ i
  $|z/b|<1$, odnosno $|z|<|b|$.
- Dakle, oblast konvergencije je: $\mathbf{|a|<|z|<|b|}$.
- Očigledno, da bi ova oblast konvergencije postojala, mora biti: $|a|<|b|$.

Stabilnost Sistema

- **Definicija**: Sistem je opisan impulsnim odzivom *h*(*n*). Neka je njegova ZT H(z). Sistem je stabilan ukoliko se jedinična kružnica **|z|=1** nalazi unutar oblasti konvergencije transformacije H(z).
- **Primjer:** Data je ZT impusnog odziva sistema:

$$H(z)=\frac{z^2-z+1}{(z^2-z+\frac{1}{2})(z-2)}$$

Odrediti oblast konvergencije tako da sistem bude stabilan.

- **Rješenje:** Polovi funkcije H(z) su određeni sa:

1. $z^2-z+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow z_{1/2}=\frac{1\pm\sqrt{1-2}}{2}=\frac{1\pm j}{2}=\frac{1}{2}\pm\frac{j}{2}$

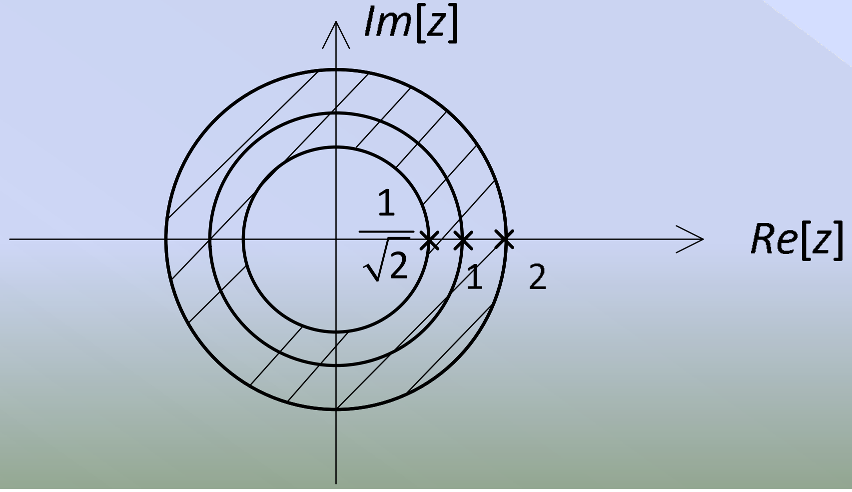
Stabilnost Sistema

2. $z-2=0 \quad \Rightarrow \quad z_3=2$

- Da bismo odredili oblast konvergencije, odredimo module kompleksnih polova dobijenih pod 1.

$$|z_1|=|z_2|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\pm\frac{j}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

- Oblast konvergencije je stoga: $\frac{1}{\sqrt{2}}<|z|<2$, pa je sistem stabilan.



Inverzna Z transformacija

- $x(n)$ se može dobiti na osnovu X(z) i njene oblasti konvergencije na više načina. Najupotrebljivaniji je razvoj funkcije X(z) u stepeni red po z^{-1}.
- **Primjer:** Odrediti niz x(n) čija je transformacija:

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4} z^{-1}}$$

sa oblašću konvergencije: a) $|z|>1/4$ b) $|z|<1/4$.

- **Rješenje:**

a) Ukoliko X(z) ima oblast konvergencije $|z|>1/4$, tada X(z) predstavlja sumu geometrijskog reda, pošto je tada:

$$\left|\frac{1}{4} z^{-1}\right| < 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{4z}\right| < 1 \Rightarrow |z| > \frac{1}{4}$$

Inverzna Z transformacija

- Stoga je:

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}z^{-1}\right)^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}z^{-n} \Rightarrow x(n)=\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u(n)$$

b) Ukoliko X(z) ima oblast konvergencije |z|<1/4, tada X(z) treba dovesti na oblik: $\frac{1}{1-4z}$

mogao predstavljati sumu geometrijskog reda, jer je tada:

$$|4z|<1 \Rightarrow |z|<\frac{1}{4}$$

- Stoga je:

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}=\frac{1}{1-\frac{1}{4z}}=\frac{4z}{4z-1}=-\frac{4z}{1-4z}=$$

Inverzna Z transformacija

$$= -4z\frac{1}{1-4z} = -4z\sum_{n=0}^{\infty}(4z)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}(4z)^{n+1} = -\sum_{n=1}^{\infty}(4z)^n =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}4^n z^n = -\sum_{n=-\infty}^{-1}4^{-n}z^{-n} \;\Rightarrow\; x(n) = -4^{-n}u(-n-1)$$

Osobine Z transformacije

- Neka je: X(z)=ZT[x(z)], Y(z)=ZT[y(z)], H(z)=ZT[h(z)].
- **Linearnost:**

$$y(n)=ax(n)+bh(n) \;\Rightarrow\; Y(z)=aX(z)+bH(z)$$

- **Pomjeranje:**

$$\mathrm{ZT}\left[x(n-n_0)\right]=z^{-n_0}X(z)$$

Posljedica: Diferencna jednačina se može predstaviti lako u z domenu. Npr., za diferencnu jednačinu: x(*n*-1)-2x(*n*-2)=y(*n*)+y(*n*+1), u z domenu imamo da je:

$$X(z)z^{-1}-2X(z)z^{-2}=Y(z)+Y(z)z$$

$$X(z)(z^{-1}-2z^{-2})=Y(z)(1+z)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{(z^{-1}-2z^{-2})}{(1+z)} \;\Rightarrow\; H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{(z^{-1}-2z^{-2})}{(1+z)}$$

Osobine Z transformacije

- **Množenje eksponencijalnih nizova:**

$$\mathrm{ZT}\left[a^n x(n)\right] = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

- **Konvolucija nizova:**

$$y(n) = x(n) * h(n) \;\Rightarrow\; \mathrm{Y}(z) = ZT\left[x(n) * h(n)\right] = H(z)X(z)$$

Primjer: Odrediti signal na izlazu sistema ako su:

$$x(n) = u(n),\;\; h(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

Rješenje:

$$X(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{i=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}, \quad za\; \left|z^{-1}\right| < 1 \;\Rightarrow\; |z| > 1$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3} z^{-1}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{3z}{3z-1}$$

Osobine Z transformacije

Prethodno važi za:

$$\left|\frac{1}{3}z^{-1}\right|<1 \Rightarrow \left|\frac{1}{3z}\right|<1 \Rightarrow |z|>\frac{1}{3}$$

Tada je:

$$\mathrm{Y}(z)=H(z)X(z)=\frac{z}{z-1}\cdot\frac{3z}{3z-1}=\frac{3z^2}{(z-1)(3z-1)}$$

Oblast konvergencije je presjek oblasti: |z|>1 i |z|>1/3, a to je |z|>1. Iz Y(z) je dalje potrebno dobiti y(n).

$$\mathrm{Y}(z)=\frac{3z^2}{(z-1)(3z-1)}=\frac{Az}{z-1}+\frac{Bz}{3z-1}=\frac{3Az^2-Az+Bz^2-Bz}{(z-1)(3z-1)}=\frac{(3A+B)z^2-(A+B)z}{(z-1)(3z-1)}$$

$$\left.\begin{array}{r}3A+B=3\\ A+B=0\end{array}\right\} - \Rightarrow A=\frac{3}{2}, B=-\frac{3}{2}$$

Osobine Z transformacije

$$Y(z)=\frac{3}{2}\frac{z}{z-1}-\frac{3}{2}\frac{z}{3z-1},\quad |z|>1$$

jer je u pitanju kauzalni niz, čiji je opšti član oblika z^{-1}.

$$Y(z)=\frac{3}{2}\frac{z}{z(1-z^{-1})}-\frac{3}{2}\frac{z}{3z(1-\frac{1}{3}z^{-1})}=\frac{3}{2}\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}=$$

$$=\frac{3}{2}\sum_{i=0}^{\infty}z^{-n}-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n}}z^{-n}\Rightarrow y(n)=\frac{3}{2}u(n)-\frac{1}{2}\frac{1}{3^{n}}u(n)$$

Osobine Z transformacije

- **Primjer:** Da li je kauzalni sistem opisan diferencnom jednačinom

$$x(n)+2x(n-1)=1/4y(n)-5/4y(n-1)+y(n-2)$$

stabilan?

- **Rješenje:**

Zapišimo najprije ZT diferencne jednačine:

$$X(z)+2X(z)z^{-1}=\frac{1}{4}Y(z)-\frac{5}{4}Y(z)z^{-1}+Y(z)z^{-2}$$

$$X(z)(1+2z^{-1})=Y(z)(\frac{1}{4}-\frac{5}{4}z^{-1}+z^{-2})$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+2z^{-1}}{\frac{1}{4}-\frac{5}{4}z^{-1}+z^{-2}}=\frac{4+8z^{-1}}{1-5z^{-1}+4z^{-2}}=\frac{4z^2+8z}{z^2-5z+4}$$

Osobine Z transformacije

- Polovi funkcije H(z) se dobijaju na sljedeći način:

$$z^2 - 5z + 4 = 0 \;\Rightarrow\; z_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow\; z_1 = 4, z_2 = 1$$

- Pošto je sistem kauzalan, oblast konvergencije je |z|>4, i očigledno ne obuhvata kružnicu |z|=1, pa je sistem nestabilan.